

Exercice 1 :

1. Faux.

En effet : si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{19\pi}{3}[2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv -\frac{32\pi}{3}[2\pi]$, alors

$$(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{w}) \equiv \frac{19\pi}{3} + \frac{32\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv \frac{51\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv 17\pi[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$$

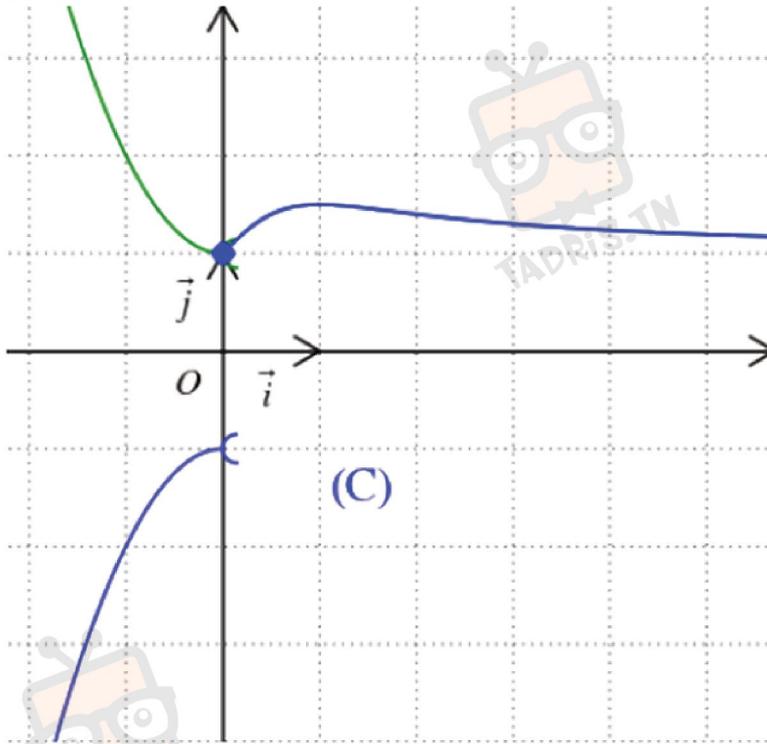
Donc les vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires et de sens contraires.

2. Vrai.

En effet : Si M est un point de la droite (AI) alors I est le projeté orthogonal de M sur

$$(BC). \text{ D'où } \overline{BM} \cdot \overline{BC} = \overline{BI} \cdot \overline{BC} = BI \cdot BC = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2 .$$

3. Vrai.



Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, les courbes représentatives de f et $|f|$ sont confondues.

Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la courbe représentative de $|f|$ est la symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.

On peut tracer d'une manière continué la courbe représentative de $|f|$ donc $|f|$ est continue sur \mathbb{R} .

4. Faux.

En effet :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad (\text{impossible})$$

donc $1 \notin f([0, 1])$.



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

Exercice 2 :

1. a) L'ensemble de définition de f est $D =]-\infty, 1]$.

La fonction $x \mapsto x - 2$ est continue sur D .

La fonction $x \mapsto 1 - x$ est continue et positive sur D donc $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur D .
Donc f est le produit de deux fonctions continues sur D donc f est continue sur D .

b) Soit a et b deux réels de D tels que $a < b$,

On a : $a - 2 < b - 2 < 0$ donc $-(a - 2) > -(b - 2)$

et $-a > -b$ donc $1 - a > 1 - b$ donc $\sqrt{1-a} > \sqrt{1-b}$

D'où $-(a - 2)\sqrt{1-a} > -(b - 2)\sqrt{1-b} \Leftrightarrow (a - 2)\sqrt{1-a} < (b - 2)\sqrt{1-b} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

Ainsi, f est strictement croissante sur D .

c) f est continue et strictement croissante sur D donc $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, f(0)] =]-\infty, 0]$.

2. a) f est continue et strictement croissante sur D et $-4 \in f(D) =]-\infty, 0]$ donc l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution α dans D .

b) On a $f(-1) = -3\sqrt{2} \approx -4,24$ et $f(0) = -2$.

$f(-1) < -4 < f(0)$ donc $-1 < \alpha < 0$.

$f(-0,5) \approx -3,06$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,5$

$f(-0,75) \approx -3,63$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,75$

$f(-0,8) \approx -3,75$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,8$

$f(-0,9) \approx -3,99$ et $f(-1) \approx -4,24$ donc $-1 < \alpha < -0,99$

Exercice 3:

1. A est le projeté orthogonal de E sur (AD) donc $\overline{DA} \cdot \overline{DE} = DA^2 = 3$.

Or $\overline{DA} \cdot \overline{DE} = DA \cdot DE \cdot \cos(\widehat{ADE}) = \sqrt{3} \cdot DE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} DE$, il en résulte : $\frac{3}{2} DE = 3$ d'où $DE = 2$.

Le triangle ADE est rectangle en A donc $AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$.

2. a) $\overline{DA} \cdot \overline{DG} = DA \cdot AG = DA \cdot (DA + AG) = DA \cdot (DA + AE) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$.

$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AE} \cdot \overline{BA} = -AE \cdot AB = -\sqrt{3}$.



في دارك... إتهون علمي قرابتة إصغارك

Donc $\overline{DE} \perp \overline{BG}$ d'où $(DE) \perp (BG)$.

c) Les deux triangles ADE et ABG sont rectangles en A, $AE = AG$ et $AD = AB$ donc :

$$DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{BA^2 + AG^2} = BG.$$

3. a) $BA^2 + BC^2 = AC^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = \sqrt{6}^2 = 6$ donc B appartient à (Γ_1) .

Pour tout point M du plan, $MA^2 + MC^2 = 6 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IC})^2 = 6$

$$\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} - \overline{IA})^2 = 6 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} - 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 6 \Leftrightarrow MI^2 = 3 - IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = 3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow IM = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, (Γ_1) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou encore le cercle de centre I et passant par B. D'où (Γ_1) est le cercle circonscrit au carré ABCD.

b) $[BD]$ est un diamètre du cercle (Γ_1) et comme H appartient à (Γ_1) alors

$(DH) \perp (BH)$ ou encore $(DH) \perp (BG)$. Or $(DE) \perp (BG)$, il en résulte : $(DH) \parallel (DE)$ d'où les points D, E et H sont alignés.

$$\text{On a : } \overline{GB} \cdot \overline{GD} = \overline{GA} \cdot \overline{GD} = GA \cdot GD \quad \text{et} \quad \overline{GB} \cdot \overline{GD} = \overline{GB} \cdot \overline{GH} = GB \cdot GH$$

$$\text{D'où } GA \cdot GD = GB \cdot GH. \text{ Ainsi : } GH = \frac{GA \cdot GD}{GB} = \frac{1 \cdot (1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \text{ a) } JH = JB - HB = \frac{1}{2}GB - (GB - GH) = GH - \frac{1}{2}GB = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\text{b) Pour tout point M, } MG^2 - MB^2 = (\overline{MG} - \overline{MB}) \cdot (\overline{MG} + \overline{MB}) = \overline{BG} \cdot (2\overline{MJ}) = 2\overline{BG} \cdot \overline{MJ}$$

Soit K le projeté orthogonal de M sur (BG) , $MG^2 - MB^2 = 2\overline{BG} \cdot \overline{KJ}$.

$$\text{D'où } M \in (\Gamma_2) \Leftrightarrow 2\overline{BG} \cdot \overline{KJ} = 2(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow \overline{BG} \cdot \overline{KJ} = \sqrt{3} - 1$$

Les vecteurs \overline{BG} et \overline{KJ} sont colinéaires et $\overline{BG} \cdot \overline{KJ} > 0$ donc \overline{BG} et \overline{KJ} sont colinéaires et de même sens et par suite $BG \cdot KJ = \sqrt{3} - 1$.

$$\text{D'où } 2KJ = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow KJ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Or \overline{BG} et \overline{HJ} sont colinéaires et de même sens et $HJ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, donc $K = H$.

Par suite, (Γ_2) est la droite perpendiculaire à la droite (BG) en H d'où $\Gamma_2 = (DH)$.



في دارك... إتهون على قرابت إصغارك

